DIMENSI METRIK LOKAL PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Tri Atmojo Kusmayadi [1,a)], Fika Catur Fitriyanti[2)], Salma Fauziyah Ashim[3)]
[1]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret, Surakarta
[a)]tri.atmojo.kusmayadi@staff.uns.ac.id

Abstrak

Misal G adalah suatu graf terhubung dengan $V(G)$ sebagai himpunan *vertex* dan $E(G)$ sebagai himpunan *edge*. Jarak antar dua *vertex* $u$dan v pada graf G adalah *path* terpendek antara *vertex*$u$dan v yang dinotasikan dengan $d(u,v)$. Suatu himpunan $W \subset V(G)$ dan untuk setiap $v \in V(G)$, representasi *vertex* v terhadap W didefinisikan sebagai k-pasangan terurut $r(v|W) = \left(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\right)$. Himpunan W merupakan himpunan pembeda lokal dari G jika untuk setiap dua *vertex* berbeda $u, v \in V(G)$ yang saling *adjacent* berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik lokal dari G dan banyaknya anggota dari basis metrik lokal di G disebut dimensi metriklokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$. Dalam penelitian ini dicari dimensi metrik lokal pada beberapa kelas graf, khususnya graf *windmill* $Wd_{k,n}$,graf lintasan korona sisi graf lobster $P_m \diamond L_n(q,r)$, dan graf lintasan korona graf *wheel* $P_n \odot W_m$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dimensi metrik lokal pada graf *windmill* yaitu $dim_l\left(Wd_{k,n}\right) = n(k-2)$ untuk $k \geq 3$ dan $n \geq 2$. Dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona sisi graf lobster yaitu $dim_l\left(P_m \diamond L_n(q,r)\right) = n+1$ untuk $m = 2$ dan $n, q, r \geq 2$ serta $dim_l\left(P_m \diamond L_n(q,r)\right) = n(m-1)$ untuk $m \geq 3$ dan $n, q, r \geq 2$. Dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona graf *wheel* yaitu $dim_l(P_n \odot W_m) = 4$ untuk $n = 1$ dan $m = 3$, $dim_l(P_n \odot W_m) = 3$ untuk $n = 1$ dan $m = 4$, $dim_l(P_n \odot W_m) = 3n$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 3$, $dim_l(P_n \odot W_m) = 2n$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 4$, $dim_l(P_n \odot W_m) = \left\lfloor \frac{m+7}{4} \right\rfloor$untuk $n = 1$ dan $m \geq 5$, $dim_l(P_n \odot W_m) = n\left\lfloor \frac{m+3}{4} \right\rfloor$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 5$.

Kata Kunci: Dimensi metrik lokal, himpunan pembeda lokal, graf *windmill*, graf lintasan korona sisi graf lobster, graf lintasan korona graf *wheel*

1. LATAR BELAKANG

Chartrand *et al.* [1] mendefinisikan bahwa suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut himpunan *vertex*dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang disebut himpunan *edge.* Salah satu konsep dalam teori graf yaitu dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh Slater [2] pada tahun 1975. Kemudian Harary dan Melter [3] pada tahun 1976 juga memperkenalkan konsep yang sama.Misalkan G adalah suatu graf terhubung dengan $V(G)$ sebagai himpunan *vertex* dan $E(G)$ sebagai himpunan *edge.* Didefinisikan suatu himpunan $W \subset V(G)$ dan untuk setiap $v \in V(G)$, representasi *vertex* v terhadap W dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ didefinisikan sebagai k-pasangan terurut $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua *vertex* berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik dari G dan banyaknya anggota dari basis metrik di G disebut dimensi metrik dari G yang dinotasikan dengan $dim(G)$.

Penelitian dalam teori graf terus berkembang khususnya padakonsep dimensi metrikyang telah memunculkan konsep-konsep baru. Salah satu konsep pengembangan dimensi metrik yaitu konsep dimensi metriklokal yang pertama kali diperkenalkan Okamoto *et al.*[4] pada tahun 2010. Okamoto *et al.*[4] mendefinisikan misal G adalah graf terhubung, suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dimana $W \subset V(G)$ dan v merupakan sebuah *vertex*pada graf G, maka representasi *vertex*v terhadap W didefinisikan sebagai n-pasangan terurut $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_n)\big)$. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda lokal jika $r(u|W) \neq r(v|W)$ untuk setiap pasang *vertex* u dan v yang saling *adjacent* pada graf G. Himpunan pembeda lokal dengan jumlah anggota minimum disebut basis metrik lokal dari G dan banyaknya anggota pada basis metrik lokal disebut dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$.

Beberapa peneliti telah menentukan dimensi metrik lokal pada beberapa kelas graf. Pada tahun 2014, Ningsih *et. al.* [5] telah meneliti dimensi metrik lokal pada graf hasil kali *comb* dari graf siklus dan graf lintasan. Pada tahun 2017, Rimadhany [6] telah meneliti dimensi metrik lokal pada graf *circulant*. Pada tahun 2018, Budianto dan Kusmayadi [7] telah meneliti dimensi metrik lokal pada graf *starbarbell*, graf $K_m \odot P_n$, dan graf *mobius ladder*. Pada tahun yang sama, Khoiriah dan Kusmayadi [8] telah meneliti dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf *sun*. Pada penelitian ini, ditentukan dimensi metrik pada graf *windmill* $Wd_{k,n}$, graf lintasan korona sisi graf lobster $P_m \diamond L_n(q,r)$, dan graf lintasan korona graf *wheel* $P_n \odot W_m$.

2. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan dimensi metrik lokal pada graf *windmill* $Wd_{k,n}$dengan $k \geq 3$dan $n \geq 2$, dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona sisi graf lobster $P_m \diamond L_n(q,r)$ dengan $m, n, q, r \geq 2$, dan graf lintasan korona graf *wheel* $P_n \odot W_m$ dengan $n \geq 1$dan $m \geq 3$.

3. METODOLOGI

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka, yaitu dengan mengumpulkan referensi dari buku-buku dan jurnal. Dengan metode ini, dapat ditentukan dimensi metrik pada graf *windmill*$Wd_{k,n}$, graf lintasan korona sisi graf lobster $P_m \diamond L_n(q,r)$, dan graf lintasan korona graf *wheel* $P_n \odot W_m$. Berikut merupakan langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini.

1. Menentukan himpunan pembeda local W.
2. Menghitung jarak setiap *vertex* pada graf $Wd_{k,n}$,$P_m \diamond L_n(q,r)$, dan $P_n \odot W_m$ terhadap W, sedemikian sehingga setiap dua *vertex* berbeda dan saling *adjacent* mempunyai representasi yang berbeda terhadap W.
3. Menentukan basis metriklokal, yaitu himpunan pembeda lokal dengan kardinalitas terkecil.
4. Menentukan rumus umum dimensi metrik lokal pada kelas graf tersebut.

5. Membangun lema dan/atau teorema beserta pembuktian berdasarkan hasil yang diperoleh.
6. Membuat kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Operasi pada Graf

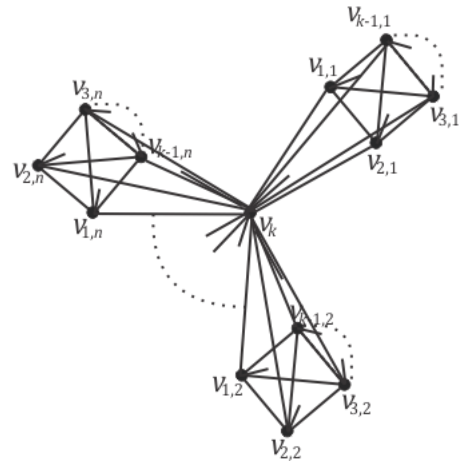
Suatu graf dapat dibentuk dengan menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Berikut definisi operasi korona sisi menurut Hou dan Wai-Chee [9] serta operasi korona menurut Frucht dan Harary [10].

Definisi 4.1. *Diketahui* G_1 *dan* G_2 *masing-masing merupakan graf dengan* n_1 *titik dan* m_1 *sisi dan* n_2 *titik dan* m_2 *sisi. Korona sisi dari graf* G_1 *dan* G_2 *yang dinotasikan dengan* $G_1 \diamond G_2$ *adalah graf yang terbentuk dari salinan* G_1 *dan* m_1 *salinan graf* G_2 *kemudian menggabungkan dengan dua titik akhir dari* $e_i \in E(G_1)$ *ke setiap titik* $v_i \in V(G_2)$ *dengan* $i = 1, 2,3, \ldots, n$.

Definisi 4.2. *Hasil operasi korona dua graf* G_1 *dan* $G_2 (G_1 \odot G_2)$ *merupakan suatu graf yang terbentuk dari* G_1 *dan* $|V(G_1)|$ *salinan graf* G_2 *yaitu* G_{2i} *dengan* $i = 1, 2,3, \cdots, |V(G_1)|$, *kemudian menghubungkan setiap vertexgraf* G_1 *ke setiap vertex pada salinan ke-i graf* G_2.

4.2 Dimensi Metrik Lokal pada Graf *Windmill* $Wd_{k,n}$.

Purwanto [11] mendefinisikan bahwa graf *windmill* yang dinotasikan dengan $Wd_{k,n}$ merupakan graf sederhana tak berarah dengan $\left((k - i)n\right) + 1$ *vertex* dan $\frac{nk(k-1)}{2}$ *edge*. Graf *windmill* dapat dibangun dengan menggabungkan *n-copy* graf lengkap dengan satu *vertex* yang sama. Gambar graf *windmill* $Wd_{k,n}$ dapat dilihat pada Grambar 1.



Gambar 1. Graf *Windmill* $\boldsymbol{Wd_{k,n}}$

Diberikan teorema dari Okamoto *et al.* [4] untuk mendukung pembuktian selanjutnya.

Teorema 4.1.*Misal G adalah graf terhubung nontrivial dengan ordern, maka* $dim_l(G) = n - 1$*jika dan hanya jika* $G = K_n$ *serta*$dim_l(G) = 1$*jika dan hanya jika G merupakan graf bipartit.*

Berikut ini diberikan hasil dimensi metriklokal pada graf *windmill.*

Teorema 4.2.*Untuk suatu grafwindmill*$Wd_{k,n}$*dengan*$k \geq 3$*dan* $n \geq 2$*,*
$dim_l(Wd_{k,n}) = n(k-2)$.

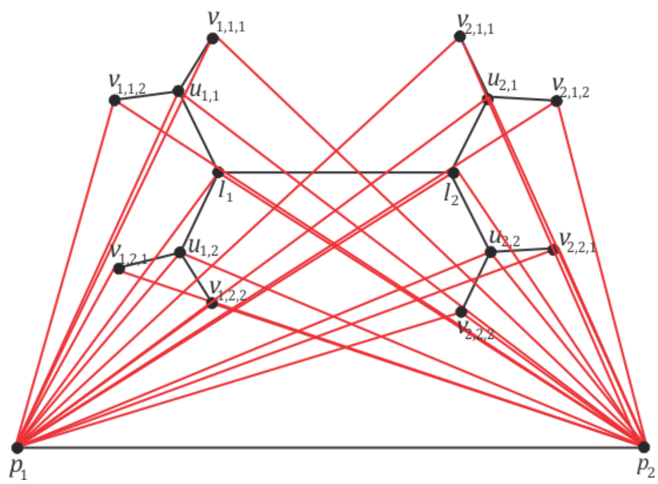
*Bukti.*Misal $Wd_{k,n}$ adalah graf *windmill*dengan $k \geq 3$dan $n \geq 2$. $V(Wd_{k,n}) = \{v_{i,j}, v_k\}$dengan$1 \leq i \leq k-1$ dan $1 \leq j \leq n$ merupakan himpunan *vertex*pada graf *windmill.* Himpunan $S = \{v_{i,j}\}$ dengan $S \subset V(Wd_{k,n})$ merupakan himpunan *vertex*yang membentuk *n*-subgraf lengkap K_{k-1}. Kemudian setiap *vertex*pada *n*-subgraf lengkap K_{k-1} dihubungkan dengan *vertex*v_k.Jelas bahwa *vertex*$v_k$tidak akan termuat ke dalam himpunan pembeda lokal$W$, karena setiap *vertex*pada graf *windmilladjacent* dengan *vertex*v_k sehingga jarak dari setiap *vertex* pada graf *windmill* ke *vertex*v_k adalah sama. Oleh karena itu, himpunan pembeda lokal$W$ hanya dipengaruhi oleh *n*-subgraf lengkap K_{k-1} yang terdapat pada graf *windmill*. Dengan menggunakan Teorema 4.1 terbukti bahwa

$dim_l(Wd_{k,n}) = n(k-2)$ untuk $k \geq 3$ dan $n \geq 2.$

□

4.3 Dimensi Metrik Lokal pada Graf Lintasan Korona Sisi Graf Lobster.

Graf lintasan korona sisi graf lobster yang dinotasikan dengan $P_m \diamond L_n(q,r)$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil operasi korona sisi graf lintasan P_m dengan graf lobster $L_n(q,r)$.Hasil operasi korona sisi antara graf lintasan dan graf lobster dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf$\boldsymbol{P_2 \diamond L_2(2,2)}$

Berikut diberikan hasil dimensi metrik lokal pada graf $P_m \diamond L_n(q,r)$.

Teorema 4.3.*Untuk suatu graf* $P_m \diamond L_n(q,r)$*dengan*$m,n,q,r \geq 2$

$$dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) = \begin{cases} n+1, & m = 2 \text{ dan } n,q,r \geq 2, \\ n(m-1), & m \geq 3 \text{ dan } n,q,r \geq 2. \end{cases}$$

*Bukti.*Pembuktian teorema dimensi metrik lokal pada graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1.$m = 2$dan$n,q,r \geq 2.$

Misal $W = \{l_1, l_2, \dots, l_n, p_1\}$, diperoleh representasi setiap *vertex* pada graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ terhadap W adalah

$r(p_1|W) = (1,1,\dots,1,0)$ $\quad r(u_{1,1}|W) = (1,2,\dots,2,1)$ $\quad r(u_{1,1,1}|W) = (2,2,\dots,2,1)$

$r(p_2|W) = (1,1, \dots ,1,1)$
$r(l_1|W) = (0,1, \dots ,2,1)$
$r(l_2|W) = (1,0, \dots ,2,1)$
$r(l_3|W) = (2,1, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(l_n|W) = (2,2, \dots ,0,1)$

$r(u_{1,2}|W) = (1,2, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{1,q}|W) = (1,2, \dots ,2,1)$
$r(u_{2,1}|W) = (2,1, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{2,q}|W) = (2,1, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{n,q}|W) = (2,2, \dots ,1,1)$

$r(u_{1,1,2}|W) = (2,2, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{1,1,r}|W) = (2,2, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{1,2,r}|W) = (2,2, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{1,q,r}|W) = (2,2, \dots ,2,1)$
$r(u_{2,q,r}|W) = (2,2, \dots ,2,1)$
$\vdots$
$r(u_{n,q,r}|W) = (2,2, \dots ,2,1).$

Setiap dua *vertex* yang saling *adjacent* mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa graf $P_m \diamond L_n(q,r)$dengan $m = 2$ dan $n, q, r \geq 2$ tidak mempunyai himpunan pembeda lokal dengan $|W| < n + 1$.Andaikan graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ memuat himunan pembeda lokal dengan $|W| < n + 1$

maka terdapat tiga kemungkinan pemilihan *vertex*.

1. Semua *vertex* merupakan elemen dari $L_n(q,r)$, diperoleh $r(p_1|W) = r(p_2|W)$.
2. Dua *vertex* merupakan elemen dari $P_m$dan *vertex* lainnya merupakan elemen dari $L_n(q,r)$. Misal dipilih $W = \{l_i, p_j\}$ dengan $1 \leq i \leq n - 1$ dan $1 \leq j \leq m$diperoleh $r(u_{n-1,q}|W) = r(v_{n-1,q,r}|W)$ dan $r(u_{n,q}|W) = r(v_{n,q,r}|W)$ sedemikian sehingga untuk dua *vertex* yang saling *adjacent* mempunyai representasi yang sama terhadap W.
3. Satu *vertex* merupakan elemen dari $P_m$dan *vertex* lainnya merupakan elemen dari $L_n(q,r)$. Misal dipilih $W = \{l_i, p_1\}$dengan $1 \leq i \leq n - 1$, diperoleh $r(u_{n,q}|W) = r(v_{n,q,r}|W)$ dimana *vertex* $u, v \in L_n(q,r)$ merupakan dua *vertex* yang saling *adjacent*. Begitupun jika diambil sebarang *vertex* dengan $|V| < n + 1$dari $L_n(q,r) \cup P_m$maka terdapat dua *vertex* yang saling *adjacent* memiliki representasi yang sama terhadap W.

Dari kemungkinan yang ada, diperoleh hasil yang kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu, $P_m \diamond L_n(q,r)$ tidak memiliki himpunan pembeda lokal dengan $|W| < n+1$ dan diperoleh himpunan pembeda lokal pada graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ adalah $n+1$elemen, sedemikian sehingga $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) = n+1$ untuk $m = 2$ dan $n, q, r \geq 2$.

Kasus 2.$m \geq 3$dan$n, q, r \geq 2$.

Misal graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ merupakan graf lintasan korona sisi graf lobster dengan $m \geq 3$ dan $n, q, r \geq 2$.

1. Ditunjukkan bahwa $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) \geq n(m-1)$.

   Andaikan graf $P_m \diamond L_n(q,r)$ mempunyai himpunan pembeda lokal dengan $|W| < n(m-1)$. Misal diambil $W = \{l_i^j\}$ dengan $1 \leq i \leq n-1$dan $1 \leq j \leq m-1$.Diperoleh $r(u_{n,q}^{m-1}|W) = r(v_{n,q,r}^{m-1}|W)$ untuk setiap dua *vertex* u, vmerupakan *vertex* yang saling *adjacent*.Oleh karena itu, Wbukan merupakan himpunan pembeda lokal dengan $|W| < n(m-1)$. Diperoleh hasil yang kontradiksi dengan pengandaian sehingga terbukti bahwa $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) \geq n(m-1)$.

2. Ditunjukkan bahwa $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) \leq n(m-1)$.

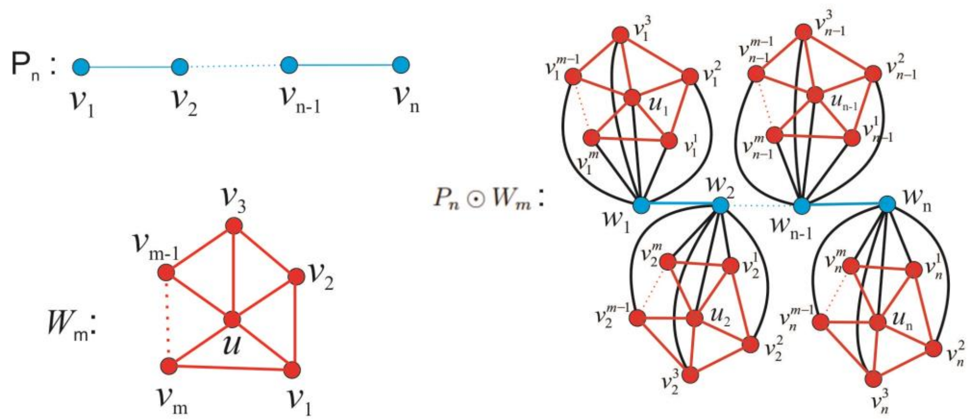
   Diasumsikan dengan$W = \{l_i^j\}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m-1$. Diperoleh untuk sebarang dua *vertex* $u, v \in V(P_m \diamond L_n(q,r))$yang saling *adjacent* berlaku$r(u|W) \neq r(v|W)$, sehingga Wmerupakan himpunan pembeda lokal dan terbukti bahwa $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) \leq n(m-1)$.

Dari 1 dan 2 diperoleh $n(m-1) \leq dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) \leq n(m-1)$, sehingga terbukti bahwa $dim_l(P_m \diamond L_n(q,r)) = n(m-1)$ untuk $m \geq 3$ dan $n, q, r \geq 2$.

□

4.4 Dimensi Metrik Lokal pada Graf Lintasan Korona Graf *Wheel*.

Graf $P_n \odot W_m$ merupakan graf hasil korona antara graf lintasan P_n dengan graf *wheel*W_m dan ilustrasi graf $P_n \odot W_m$ ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Bentuk umum graf $P_n \odot W_m$

Berikut ini dibahas mengenai dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona graf *wheel*$P_n \odot W_m$beserta pembuktiannya.

Teorema 4.4.*Jika*$P_n \odot W_m$*adalah graf hasil korona antara graf lintasan*P_n*dengan graf wheel*W_m*dengan*$n \geq 1$*dan*$m \geq 3$*maka*

$$dim_l(P_n \odot W_m) = \begin{cases} 4, & n = 1\ dan\ m = 3; \\ 3, & n = 1\ dan\ m = 4; \\ 3n, & n \geq 2\ dan\ m = 3; \\ 2n, & n \geq 2\ dan\ m = 4; \\ \left\lfloor \dfrac{m+7}{4} \right\rfloor, & n = 1\ dan\ m \geq 5; \\ n\left\lfloor \dfrac{m+3}{4} \right\rfloor, & n \geq 2\ dan\ m \geq 5. \end{cases}$$

Bukti.Diberikan graf lintasan korona graf *wheel*$P_n \odot W_m$ dengan $n \geq 1$dan $m \geq 3$. Himpunan *vertex*graf lintasan korona graf *wheel*$P_n \odot W_m$adalah

$V(P_n \odot W_m) =$
$\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}, w_n, u_1, u_2,, \dots, u_{n-1}, u_n, v_1^1, v_1^2, v_1^3, \cdots, v_1^{m-1}, v_1^m, v_2^1, v_2^2, v_2^3, \dots,$

$v_2^{m-1}, v_2^m, \dots, v_3^{m-1}, v_3^m, \dots, v_n^{m-1}, v_n^m\}$. Pembuktian rumus umum dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona graf *wheel*$P_n \odot W_m$ dibagi menjadi enam kasus sebagai berikut.

Kasus 1.$n = 1$dan$m = 3$

Graf $P_n \odot W_m$dengan $n = 1$ dan $m = 3$ merupakan graf dimana setiap *vertex* pada graf tersebut termuat dalam graf lengkap K_5. Berdasarkan hasil penelitian Okamoto *et al*.[4] yang menyatakan bahwa dimensi metrik lokal adalah $n - 1$ untuk $n \geq 2$ jika dan hanya jika $G = K_n$. Dengan demikian, diperoleh $dim_l(P_n \odot W_m) = 5 - 1 = 4$.Sehingga terbukti bahwa $dim_l(P_n \odot W_m) = 4$ untuk $n = 1$dan $m = 3$.

Kasus 2.$n = 1$dan$m = 4$

Graf $P_n \odot W_m$dengan $n = 1$ dan $m = 4$ memuat *cycle*ganjil sehingga diperoleh $dim_l(P_1 \odot W_4) \neq 1$. Misal diambil $W = \{v_1^1, v_1^2\}$ dimana $v_1^1, v_1^2 \in V(P_1 \odot W_4)$maka terdapat $u_1, w_1 \in V(P_1 \odot W_4)$mempunyai representasi yang sama dan saling *adjacent*. Akibatnya, $dim_l(P_1 \odot W_4) \neq 2$. Dengan kata lain, jika W merupakan himpunan pembeda lokal maka setidaknya terdapat satu diantara *vertex*u_1 atau w_1 yang menjadi elemen dari W. Misal diambil $W = \{w_1, v_1^1, v_1^2\}$ sehingga kardinalitas W adalah 3. Diperoleh representasi setiap *vertex* terhadap W sebagai berikut.

$$r(u_1|W) = (1,1,1); \quad r(w_1|W) = (0,1,1); \quad r(v_1^1|W) = (1,0,1);$$
$$r(v_1^2|W) = (1,1,0); \quad r(v_1^3|W) = (1,2,1); r(v_1^4|W) = (1,1,2).$$

Setiap dua *vertex* yang saling *adjacent* mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Dengan demikian, terbukti $dim_l(P_1 \odot W_4) = 3$ untuk $n = 1$dan $m = 4$.

Kasus 3.$n \geq 2$dan$m = 3$

Graf $P_n \odot W_m$dengan $n \geq 2$ dan $m = 3$ isomorfik dengan graf $P_n \odot K_4$, *order* dari graf lintasan adalah n.Berdasarkan hasil penelitian Rodriguez-Velazquez *et al*. [12] yang menyatakan bahwa jika *vertex* K_1 anggota dari suatu basis metrik lokal graf $K_1 + H$ dan graf H bukan graf kosong maka untuk sebarang graf terhubung G dengan $|G| \geq 2$ memiliki $dim_l(K_1 + H) = |G| \cdot (dim_l(K_1 + H) - 1)$. Pada graf $P_n \odot K_4$, setiap *vertex* graf P_n anggota dari basis metrik lokal graf $P_1 + K_4$ yang mana isomorfik dengan graf $K_1 + K_4$. Sehingga diperoleh $dim_l(P_n \odot W_m) = n(dim_l(K_1 + K_4) - 1) = n(4 - 1) = 3n$. Dengan demikian, terbukti bahwa $dim_l(P_n \odot W_m) = 3n$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 3$.

Kasus 4. $n \geq 2$ dan $m = 4$

Graf $P_n \odot W_m$ merupakan graf hasil korona antara graf lintasan P_n dengan graf *wheel* W_m dengan $n \geq 2$ dan $m = 4$. *Order* dari graf lintasan adalah n. Berdasarkan hasil penelitian Rodriguez-Velazquez *et al.* [12], seperti pada Kasus 3 diperoleh $dim_l(P_n \odot W_m) = n(dim_l(K_1 + W_4) - 1) = n(3 - 1) = 2n$. Dengan demikian, terbukti bahwa $dim_l(P_n \odot W_m) = 2n$ untuk $n \geq 2$ dan $m = 4$.

Kasus 5. $n = 1$ dan $m \geq 5$

Ditunjukkan bahwa $dim_l(P_n \odot W_m) = \left\lfloor \frac{m+7}{4} \right\rfloor$ untuk $n = 1$ dan $m \geq 5$. Misal dipilih $W = \{w_1, v_1^{4j+1}\}$ dimana $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{m-1}{4} \right\rfloor$. Sehingga kardinalitas W adalah $\left\lfloor \frac{m+7}{4} \right\rfloor$. Representasi setiap *vertex* terhadap W dibagi menjadi dua kejadian sebagai berikut.

a) Untuk $m = 6$.

   Khusus untuk $m = 6$ jika dipilih $W = \{w_1, v_1^1, v_1^4\}$ maka diperoleh representasi setiap *vertex* terhadap W sebagai berikut.

$$r(w_1|W) = (0,1,1), \qquad r(u_1|W) = (1,1,1);$$

$$r(v_1^i|W) = \begin{cases} \left(1, \left(i - \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor\right) \bmod 2, 2\right), & i = 1, 2; \\ (1,2,1), & i = 3; \\ (1,2, i \bmod 2), & i = 4, 5; \\ (1,1,2), & i = m; \end{cases}$$

b) Untuk $m = 4k+1, m = 4k+3, m = 4k+4$ dengan $k = 1,2,\dots$ dan untuk $m = 4k+2$ dengan $k = 2,3,\dots,$ misalkan $a = 4k+1, b = 4k+2, = 4k+3, d = 4k+4$ diperoleh representasi setiap *vertex* terhadap *W*, yaitu

$r(w_1|W) = (0,1,1,\dots,1), \quad r(u_1|W) = (1,1,1,\dots,1);$

$$r(v_1^i|W) = \begin{cases} (1,0,2,2,\dots,1), & i = 1, \text{untuk } m = a; \\ (1,0,2,2,\dots,2), & i = 1, \text{untuk } m = b,c,d; \\ \left(1,\left(i - \left\lceil \frac{i}{4} \right\rceil\right) \bmod 3, 2, 2, \dots, 2\right), & i = 2,3; \\ \left(1,2,\left(i - \left\lceil \frac{i}{4} \right\rceil\right) \bmod 3, 2, \dots, 2\right), & i = 5,6,7; \\ \vdots & \vdots \\ \left(1,2,2,2,\dots,\left(i - \left\lceil \frac{i}{4} \right\rceil\right) \bmod 3, 2, \dots, 2\right), & i = \left(4\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 7\right), \left(4\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 6\right), \left(4\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 5\right); \\ (1,2,(i-1) \bmod 2, 2, \dots, 2), & i = 4; \\ (1,2,2,(i-1) \bmod 2, 2, \dots, 2), & i = 8; \\ \vdots & \vdots \\ (1,2,2,\dots,(i-1) \bmod 2), & i = \left(4\left\lceil \frac{m}{4} \right\rceil - 4\right); \\ (1,1,2,\dots,2,0), & i = m, \text{untuk } m = a; \\ (1,1,2,\dots,2,1), & i = m, \text{untuk } m = b; \\ (1,1,2,\dots,2,2), & i = m, \text{untuk } m = c,d; \end{cases}$$

Berdasarkan representasi $r\left(v_1^i|W\right)$pada kondisi (b), beberapa *vertex*v_1^i dengan $1 \le i \le m$ memiliki representasi yang sama terhadap W akan tetapi tidak saling*adjacent*sehingga W adalah himpunan pembeda lokal. Dengan demikian, berdasarkan kondisi (a) dan (b) diperoleh $dim_l(P_n \odot W_m) = \left\lceil \frac{m+7}{4} \right\rceil$ untuk $n = 1$ dan $m \ge 5$.

Kasus 6.$n \ge 2$dan$m \ge 5$

Graf $P_n \odot W_m$adalah graf hasil korona antara graf lintasan P_n dengan graf *wheel*W_m. Order dari graf P_n adalah$n$. Seperti pada Kasus 3, diperoleh $dim_l(P_n \odot W_m) = n(dim_l(K_1 + W_m) - 1) = n(\left\lceil \frac{m+7}{4} \right\rceil - 1) = n\left\lceil \frac{m+3}{4} \right\rceil$.Dengan demikian, terbukti bahwa $dim_l(P_n \odot W_m) = n\left\lceil \frac{m+3}{4} \right\rceil$ dengan $n \ge 2$ dan $m \ge 5$.

□

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa dimensi metriklokal pada graf *windmill* $Wd_{k,n}$, dimensi metrik lokal pada graf lintasan korona sisi graf lobster $P_m \diamond L_n(q,r)$, dan graf lintasan korona graf *wheel* $P_n \odot W_m$ secara berturut-turut dinyatakan dalam Teorema 4.2, Teorema 4.3, dan Teorema 4.4.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand,G.,L.Lesniak, and P. Zhang, *Graphs and Digraphs*, 6thed.,CRC Press, New York, 2016.
[2] Slater, P.J.,*Leave of Trees*, Congressus Numerantium **14**(1975),549-559.
[3] Harary, F.,and R.A.Melter, *On The Metric Dimension of a Graph*, Ars Combinatoria **2** (1976),191-195.
[4] Okamoto, F., B. Phinezy, and P. Zhang, *The Local Metric Dimension of a Graph*, Mathematica Bohemica **135** (2010), 610-620.
[5] Ningsih, E. U. S., N. Estuningsih, dan L. Susilowati, *Dimensi metrik Lokal pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Lintasan*, Jurnal Matematika, **1** (2014), no. 1, 24-33.
[6] Rimadhany, R., *Dimensi Metrik Lokal dari Graf Circulant*, Institut Teknologi Sepuluh November (2017), 1-92.,
[7] W. T. Budianto and T. A. Kusmayadi, *The Local Metric Dimension of Starbarbell Graph,* $K_m \odot P_n$*Graph, and Mobius Ladder Graph*, Journal of Physics: Conference Series **1008**(2018), 012050.
[8] Khoiriah, S. danT. A. Kusmayadi, *Dimensi Metrik Lokal pada Graf Antiprisma dan Graf Sun*, Journal of Mathematics and Mathematics Education **8** (2018), no. 1, 9-15.
[9] Hou, Y. and Wai-Chee Shiu, *The Spectrum of The Edge Corona of Two Graphs,* Electronic Journal of Linear Algebra **20** (2010), 586-594.
[10] Harary, F. and Frucht, R., *On The Corona of Two Graphs*, Aequationes Math **4** (1970), 322-325.
[11] Purwanto, *Matematika Diskrit*, IKIP Malang, Malang, 1998.
[12] Rodriguez-Velazquez, J. A., G. A. Barragan-Ramirez, and C. G. Gomez, *On The Local Metric Dimension of Corona Product Graphs,* Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **39** (2016), no. 2, 157-173.